Tentamen Discrete Structuren

donderdag 20 april 2006, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is.

Er is **geen** vrijstelling op grond van toetsresultaten.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Bewijs: er zijn oneindig veel priemgetallen. Geef aan welke bewijsmethode je gebruikt.

2. (a) Geef een expliciete formule voor de getallen s_n van de rij van Fibonacci, gegeven door

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_1 &= 1 \\ s_n &= s_{n-1} + s_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \end{aligned}$$

   (b) Laat zien dat $s_n = O((1,5)^n)$.

3. (a) Geef een definitie van het begrip *equivalentie-klasse* (equivalence class).

   (b) De relatie $\sim$ op Z is gedefinieerd door: $m \sim n$ dan en slechts dan als $6 \mid (m - n)$, dwz. 6 is een deler van $m - n$. Bewijs dat $\sim$ een equivalentie-relatie is.

   (c) Hoe zien de equivalentie-klassen van $\sim$ eruit?

4. (a) Geef definities van de begrippen *boom* (tree) en *opspannende boom* (spanning tree).

   (b) Bewijs dat elke eindige samenhangende graaf G een opspannende boom heeft. (Aanwijzing: beschouw een minimale samenhangende deelgraaf van G.)

5. Bewijs mbv. een geannoteerd lineair bewijs:

   (a) $((p \to q) \to r) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$

   (b) $\exists x((p(x) \to q(x)) \to r(x)) \Rightarrow ((\exists x p(x) \to \forall x q(x)) \to \exists x r(x))$ (Aanwijzing: gebruik eerst de $\Rightarrow$-richting van (a), later de andere richting.)

6. (a) Wanneer zijn twee verzamelingen (eindig of oneindig) even groot?

   (b) Geef een voorbeeld van twee even grote verzamelingen X en Y met $X \neq Y$ en $X \subseteq Y$. Vergeet de argumentatie niet.